

Prof. Dr. Alfred Toth

Homomorphe Abbildungen und modelltheoretische Abgeschlossenheit

1. Homomorphe Abbildungen bei Peanozahlen

Im folgenden sei als Beispiel ein in der qualitativen Mathematik übersehener Abschnitt aus Klaus (1975, S. 352) gegeben.

2. beinhaltet der Begriff der homomorphen Abbildung, daß Zusammenhänge, Wahrheiten usw. erfaßbar sind, die in sich vollständig sind und einer Ergänzung durch das, was bei der homomorphen Abbildung verlorengegangen ist, nicht bedürfen.

Was damit gemeint ist, soll durch eine elementare Analogie deutlich gemacht werden. Wir wollen versuchen, Gesetzmäßigkeiten herauszufinden, die sich ergeben, wenn wir die kleinsten geraden und ungeraden natürlichen Zahlen addieren. Es sei u ein Symbol für ungerade und g für gerade Zahlen.

$$a) \ 1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$2 + 2 = 4$$

$$b) \ u + u = g$$

$$u + g = u$$

$$g + u = u$$

$$g + g = g$$

Unter a) stellen wir fest, daß offensichtlich zwei gerade Zahlen miteinander addiert ebenso wie zwei ungerade Zahlen miteinander addiert eine gerade Zahl ergeben, während eine ungerade Zahl zu einer geraden Zahl addiert (und umgekehrt) eine ungerade Zahl ergibt. Unsere Tabelle a) befriedigt uns deswegen nicht ganz, weil wir plötzlich zu Zahlen gelangt sind, nämlich zu den Zahlen 3 und 4, die unserer ursprünglichen Absicht (uns nämlich nur mit den kleinsten natürlichen geraden und ungeraden Zahlen zu beschäftigen) nicht entsprechen. In unserer Tabelle ist z. B. nichts über die Beziehung zwischen der Zahl 3 und 4 enthalten. Wir könnten diese Tabelle fortsetzen und auch die Beziehungen zwischen den Zahlen 3 und 4 einbeziehen. Aber dann kommen wir zu den weiteren Zahlen 5, 6 usw. Unsere Tabelle ist also nicht abgeschlossen. Wir können nun einen homomorphen Übergang dadurch vollziehen, daß wir die geraden Zahlen unserer Tabelle durch g , die ungeraden durch u charakterisieren. Wir sehen dabei von der spezifischen Natur der geraden und ungeraden Zahlen ab. Es interessiert uns also nicht, ob es sich um eine große oder eine kleine gerade bzw. ungerade Zahl handelt. Durch diese Abstraktion geht eine Menge arithmetischen Wissens, das in unseren Gleichungen a) enthalten ist, verloren. Wir gelangen zur Tabelle b). Ungeachtet dieses Verlustes hat die Tabelle b) aber einen großen Vorzug. Sie stellt eine in sich abgeschlossene Wahrheit dar. Die Elemente dieses Systems (u, g) bilden eine Menge von Dingen, die so beschaffen ist, daß wir bei der Operation der Addition nicht über sie hinausgeführt werden.

2. Die Abbildungen der Peanozahlen auf die polykontexturalen Zahlen
Homorphe Abbildungen liegen auch bei den Schadach-Abbildungen vor.

Seien A und B zwei nichtleere endliche Mengen

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

B^A bezeichne die Menge aller Abbildungen μ von A auf B

$$B^A = (\mu \mid \mu: A \rightarrow B).$$

Dann ist die Kardinalität von B^A

$$\text{card } B^A = (\text{card } B)^{\text{card } A} = m^n$$

Bezeichne $\sim^p$ die Proto-Äquivalenz. Die Proto-Äquivalenz zweier Abbildungen μ_1 und μ_2 von B^A ist gegeben durch

$$\text{DEFINITION 1: } \mu_1 \sim^p \mu_2 \Leftrightarrow \text{card } A/\ker \mu_1 = \text{card } A/\ker \mu_2.$$

Wie man leicht sieht, ist die Proto-Äquivalenz reflexiv, symmetrisch und transitiv. Damit wird B^A in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen partitioniert, deren Anzahl

$$\text{card } B^A / \sim^p = \min(\text{card } A, \text{card } B)$$

ist.

Bezeichne $\sim^d$ die Deutero-Äquivalenz.

$$\text{DEFINITION 2: } \mu_1 \sim^d \mu_2 \Leftrightarrow A/\ker \mu_1 \equiv A/\ker \mu_2.$$

Offensichtlich ist die Deutero-Äquivalenz ebenfalls reflexiv, symmetrisch und transitiv. Ihre Anzahl ist

$$\text{card } B^A / \sim^d = \sum_{k=1}^M P(n, k),$$

darin $M = \min(\text{card } A, \text{card } B)$, $n = \text{card } A$, und $P(n, k) =$ Anzahl der Partitionen von n in k ganzzahlige Summanden ohne Berücksichtigung der Ordnung.

Bezeichne $\sim^t$ die Trito-Äquivalenz.

$$\text{DEFINITION 3: } \mu_1 \sim^t \mu_2 \Leftrightarrow A/\ker \mu_1 = A/\ker \mu_2,$$

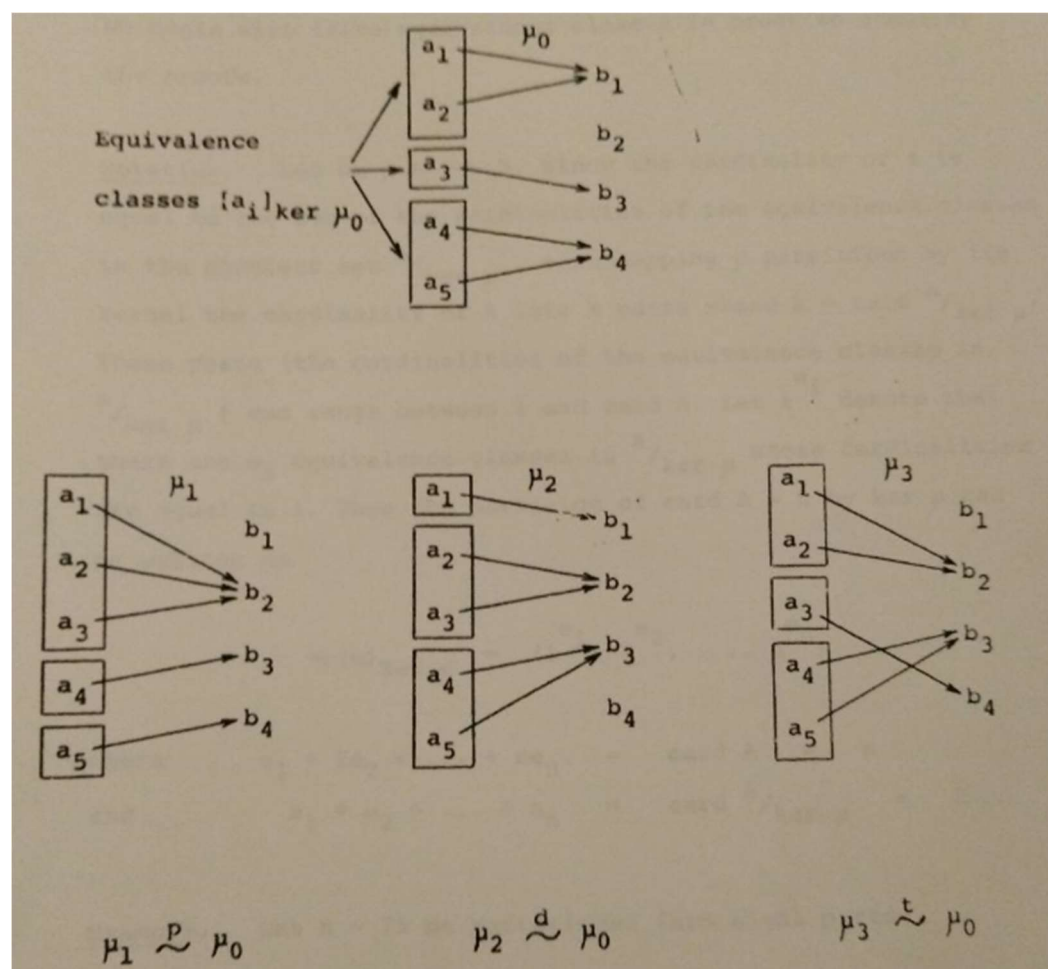
d.h. $(a_i)_{\ker \mu_1} = (a_i)_{\ker \mu_2}$ für alle $a_i \in A$.

Auch die Trito-Äquivalenz ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. Somit wird B^A in disjunkte Teilmengen partitioniert, deren Anzahl gegeben ist durch

$$\text{card } B^A / \sim^t = \sum_{k=1}^M S(n, k),$$

darin $M = \min(\text{card } A, \text{card } B)$, $n = \text{card } A$, und $S(n, k)$ = Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge von n Elementen in k nichtleere Teilmengen zu partitionieren. $S(n, k)$ sind also die Stirling-Zahlen 2. Art.

Informell ausgedrückt, werden also bei protoäquivalenten Zahlen nur die verschiedenen Symbole (Werte), bei deuteroäquivalenten Zahlen nur die verschiedenen und die gleichen Symbole (Werte), und bei tritoäquivalenten Zahlen die verschiedenen und die gleichen Symbole (Werte) sowie deren Ort berücksichtigt. Zur Illustration der durch die drei Definitionen erzeugten Schach-Abbildungen sei die folgende Tafel aus Schach (1967, S. 10) gegeben.



Wir bekommen damit für die ersten 4 Kontexturen

Proto-Semiotik

K = 1 $\left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right]$

K = 2 $\left(\begin{array}{c} 00 \\ 01 \end{array} \right)$

K = 3 $\left(\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ \text{—} \\ \text{—} \\ 012 \end{array} \right)$

K = 4 $\left(\begin{array}{c} 0000 \\ 0001 \\ \text{—} \\ \text{—} \\ 0012 \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ 0123 \end{array} \right)$

Deutero-Semiotik

$\left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right]$

$\left(\begin{array}{c} 00 \\ 01 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ \text{—} \\ \text{—} \\ 012 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{c} 0000 \\ 0001 \\ \text{—} \\ 0011 \\ 0012 \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ 0123 \end{array} \right)$

Trito-Semiotik

$\left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right]$

$\left(\begin{array}{c} 00 \\ 01 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 012 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{c} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0011 \\ 0012 \\ 0100 \\ 0101 \\ 0102 \\ 0110 \\ 0111 \\ 0112 \\ 0120 \\ 0121 \\ 0122 \\ 0123 \end{array} \right)$

Von Foerster (1967) ging allerdings bei seiner mathematischen Erklärung von Günthers Kenogrammen nicht von der Topologie, sondern simpel vom Begriff der Funktion aus. Damit entging ihm natürlich der Zusammenhang zwischen Homorphie und modelltheoretischer Abgeschlossenheit. Dabei spielt letztere ja gerade für die Einzelkontexturen der drei polykontexturalen Zahlen die Hauptrolle, denn die Anzahl mehrdeutiger polykontexturaler Zahlen pro Kontextur ist ja präzise festgelegt. Einfach ausgedrückt, entspricht sie bei den Protozahlen der Kontexturlänge, bei den Deuterozahlen den Partitionen und bei den Tritozahlen den Stirlingzahlen 2. Art.

HEINZ VON FOERSTER: Perhaps the easiest way to see the emergence of the concept *Kenogram* is to see it through the concept of the "inverse" of a logical function. The inverse of a logical function is derived in precise analogy to the inverse of a mathematical function.

Let $y = f(x)$ be a mathematical function in which the "dependent" variable y is expressed in terms of the "independent" variable x , say $y = x^2$

with $f(x) = x^2$. Inversion is accomplished when the independent variable y is explicitly expressed in terms of the dependent x :

$$x = \varphi(y)$$

maintaining, however, the original functional relationship between the two variables. In the above example $y = x^2$, the inverse function is

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Please note two points in connection with the inversion of functions. The first point refers to the conservation of the domain of x and the range of y before and after inversion. The second point refers to the possibility of a unique function becoming a multiple-valued function after inversion or vice versa.

Literatur

Günther, Gotthard/Heinz von Foerster, The logical structure of evolution and emanation. In: Annals of the New York Academy of Sciences, Bd. 138 (1967), S. 874-891

Klaus, Georg, Spezielle Erkenntnistheorie. Berlin (DDR) 1965

Schadach, Dieter, A classification of mappings. BCL Report No. 2/2, February 1, 1967

13.4.2019